

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
**ТЕОРИЯ ВЕЛИКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ**

## 2 Семестр

### Раздел 1 Первый раздел

#### 1.1 Контроль по итогам (КИ) - 8 Неделя

##### Контроль по итогам 1

##### Вопросы и задачи

1. Используя подход, рассмотренный на лекции (задача о «замедлении хода часов»), вывести:
  - a. уравнение для сокращения длины стержня, движущегося для наблюдателя;
  - b. уравнение для периода колебания электромагнитной волны в случае продольного эффекта Доплера (источник светового сигнала приближается и удаляется от наблюдателя);
  - c. уравнение для аберрации света;
  - d. уравнение, иллюстрирующее эффект увлечения света движущейся средой с неединичным коэффициентом преломления.
2. Показать справедливость калибровочного (градиентного) преобразования 4-х потенциалов  $A_\mu = A_\mu + f_{,\mu}$  (неизменность тензора электромагнитного поля).
3. Найти выражения для инвариантов электромагнитного поля, построенных из свёрток тензора электромагнитного поля:
  - a. ковариантного и контравариантного тензоров;
  - b. дуально сопряжённого ковариантного и контравариантного тензоров.
4. Вывести преобразования Лоренца для электрического и магнитного векторов, используя известные преобразования Лоренца для координат и определение тензора в отношении тензора электромагнитного поля.
5. Провести вариационный вывод динамических уравнений Максвелла.
6. Провести доказательства:
  - a. всех рассмотренных на лекции действий с тензорами на примере смешанного тензора 2-го ранга;
  - b. того, что внутреннее произведение двух тензоров первого ранга – это скалярное произведение векторов и инвариант.
1.
  - a. Пусть на плоскости в декартовых координатах коэффициенты связности равны нулю. Показать, что при этом в полярных координатах существуют отличные от нуля коэффициенты связности.
  - b. Показать, что ковариантная производная от символа Кронекера равна нулю.
2.
  - a. Определить производную Ли от контравариантного тензорного поля второго ранга.
  - b. Рассмотреть коммутатор от двух производных по направлению, действующий на скалярную функцию, и вывести производную Ли от ковариантного вектора.
3. Для тензора кривизны и ковариантного тензора кривизны доказать:
  - a. их антисимметрию по перестановке пар индексов;
  - b. тождество Риччи.
4. Вывести уравнения для:
  - a. связи упрощённых символов Кристоффеля и определителя метрического тензора;
  - b. связи ковариантного тензора кривизны с метрическим тензором и символами Кристоффеля.

5. Доказать утверждение теоремы Шура для пространства ОТО о постоянстве кривизны во всех его точках (используя тождество Бианки, ковариантное постоянство метрического тензора и связь тензора кривизны с римановой кривизной).
  6. Получить выражения, связывающие тензор Риччи и скалярную кривизну с римановой кривизной.
1. Определить элемент пространственного расстояния во вращающейся системе координат.
  2. Определить силу, действующую на релятивистскую частицу в постоянном гравитационном поле.
  3.
    - a. Получить вид оператора Д'Аламбера в криволинейных координатах.
    - b. Используя волновое уравнение в криволинейных координатах, вывести уравнение для эйконала электромагнитной волны, меняющей направление распространения (предположить большую величину производных  $\partial\psi/\partial x^i$ ).
  4.
    - a. Оценить величину гравитационного красного смещения для фотонов, регистрируемых на Земле и образующихся в источнике, который расположен в центре Галактики (точное расстояние от центра выбрать по своему усмотрению). Ответ представить в эВ и в относительных единицах. Привести пример значимости эффекта для наблюдательных данных.
    - b. Сравнить временной ход часов на двух идентичных планетах, вращающихся на расстоянии 1 а.е.: от звезды с массой, равной солнечной, и от чёрной дыры с массой в миллион солнечных. Влиянием приливных сил и вращением объектов в данной задаче пренебречь.
  5. Получить выражения для символов Кристоффеля второго рода из условия минимума вариации действия гравитационного поля по связностям (в методе Палатини).
  6. Из условий энергодоминантности установить ограничения на компоненты тензора энергии-импульса идеальной сплошной среды (плотности энергии и давления).
  7. Получить выражение для возмущения метрики в линейном приближении из условия гармонической калибровки  $\Gamma^l = 0$ .
  8. Получить дисперсионное уравнение для гравитационных волн.
  9. Вывести систему уравнений для тензора поляризации гравитационной волны (4 из условия калибровки и 4 из условия преобразования координат  $\xi^i$ ).
1. Для центрально-симметричного статического поля вычислить все ненулевые компоненты:
    - a. для символов Кристоффеля;
    - b. для тензора Риччи.
 Получить систему уравнений К. Шварцшильда с ненулевым тензором энергии-импульса.
  2. Найти симметрии метрического тензора, описывающего статическое центрально-симметричное гравитационное поле. Каков их физический смысл?
  3. Вычислить величину смещения перигелия орбит, следующих (произвольных) объектов Солнечной системы:
    - a. двух планет земной группы;
    - b. двух планет-гигантов;
    - c. двух астероидов.
  4. Вычислить величину угла гравитационного отклонения луча света:
    - a. для звезды Бетельгейзе (расстояние принять равным радиусу звезды);
    - b. для экзопланеты HD 85512 b (расстояние принять равным радиусу планеты);

- c. для галактики Андромеда (расстояние принять равным половине радиуса галактики);
  - d. для скопления Волос Вероники (расстояние принять равным половине радиуса скопления).
5. Получить выражения для перехода от системы отсчёта удалённого наблюдателя (системы отсчёта Шварцшильда) к сопутствующей системе отсчёта.
  6. Найти сечение  $\sigma = \pi r^2$  падения безмассовой частицы в черную дыру, где  $r$  - максимальный прицельный параметр, при котором частица достигает горизонта событий.
  7. Вывести выражение для метрики гравитационного поля не вращающейся заряженной чёрной дыры (метрику Рейснера-Нордстрема).
  8. Применимо ли приближение слабого гравитационного поля на расстоянии гравитационного радиуса от центра чёрной дыры звёздной массы?

## 1.2 Контроль по итогам (КИ) - 8 Неделя

### Контроль по итогам 1

#### Вопросы и задачи

7. Используя подход, рассмотренный на лекции (задача о «замедлении хода часов»), вывести:
  - a. уравнение для сокращения длины стержня, движущегося для наблюдателя;
  - b. уравнение для периода колебания электромагнитной волны в случае продольного эффекта Доплера (источник светового сигнала приближается и удаляется от наблюдателя);
  - c. уравнение для абберации света;
  - d. уравнение, иллюстрирующее эффект увлечения света движущейся средой с неединичным коэффициентом преломления.
8. Показать справедливость калибровочного (градиентного) преобразования 4-х потенциалов  $A_\mu = A_\mu + f_{,\mu}$  (неизменность тензора электромагнитного поля).
9. Найти выражения для инвариантов электромагнитного поля, построенных из свёрток тензора электромагнитного поля:
  - a. ковариантного и контравариантного тензоров;
  - b. дуально сопряжённого ковариантного и контравариантного тензоров.
10. Вывести преобразования Лоренца для электрического и магнитного векторов, используя известные преобразования Лоренца для координат и определение тензора в отношении тензора электромагнитного поля.
11. Провести вариационный вывод динамических уравнений Максвелла.
12. Провести доказательства:
  - a. всех рассмотренных на лекции действий с тензорами на примере смешанного тензора 2-го ранга;
  - b. того, что внутреннее произведение двух тензоров первого ранга – это скалярное произведение векторов и инвариант.
7. a. Пусть на плоскости в декартовых координатах коэффициенты связности равны нулю. Показать, что при этом в полярных координатах существуют отличные от нуля коэффициенты связности.

- b. Показать, что ковариантная производная от символа Кронекера равна нулю.
8. a. Определить производную Ли от контравариантного тензорного поля второго ранга.  
b. Рассмотреть коммутатор от двух производных по направлению, действующий на скалярную функцию, и вывести производную Ли от ковариантного вектора.
9. Для тензора кривизны и ковариантного тензора кривизны доказать:  
a. их антисимметрию по перестановке пар индексов;  
b. тождество Риччи.
10. Вывести уравнения для:  
a. связи упрощённых символов Кристоффеля и определителя метрического тензора;  
b. связи ковариантного тензора кривизны с метрическим тензором и символами Кристоффеля.
11. Доказать утверждение теоремы Шура для пространства ОТО о постоянстве кривизны во всех его точках (используя тождество Бианки, ковариантное постоянство метрического тензора и связь тензора кривизны с римановой кривизной).
12. Получить выражения, связывающие тензор Риччи и скалярную кривизну с римановой кривизной.
10. Определить элемент пространственного расстояния во вращающейся системе координат.
11. Определить силу, действующую на релятивистскую частицу в постоянном гравитационном поле.
12. a. Получить вид оператора Д'Аламбера в криволинейных координатах.  
b. Используя волновое уравнение в криволинейных координатах, вывести уравнение для эйконала электромагнитной волны, меняющей направление распространения (предположить большую величину производных  $\partial\psi/\partial x^i$ ).
13. a. Оценить величину гравитационного красного смещения для фотонов, регистрируемых на Земле и образующихся в источнике, который расположен в центре Галактики (точное расстояние от центра выбрать по своему усмотрению). Ответ представить в эВ и в относительных единицах. Привести пример значимости эффекта для наблюдательных данных.  
b. Сравнить временной ход часов на двух идентичных планетах, вращающихся на расстоянии 1 а.е.: от звезды с массой, равной солнечной, и от чёрной дыры с массой в миллион солнечных. Влиянием приливных сил и вращением объектов в данной задаче пренебречь.
14. Получить выражения для символов Кристоффеля второго рода из условия минимума вариации действия гравитационного поля по связностям (в методе Палатини).
15. Из условий энергодоминантности установить ограничения на компоненты тензора энергии-импульса идеальной сплошной среды (плотности энергии и давления).
16. Получить выражение для возмущения метрики в линейном приближении из условия гармонической калибровки  $\Gamma^l = 0$ .
17. Получить дисперсионное уравнение для гравитационных волн.
18. Вывести систему уравнений для тензора поляризации гравитационной волны (4 из условия калибровки и 4 из условия преобразования координат  $\xi^i$ ).
9. Для центрально-симметричного статического поля вычислить все ненулевые компоненты:  
a. для символов Кристоффеля;  
b. для тензора Риччи.
- Получить систему уравнений К. Шварцшильда с ненулевым тензором энергии-импульса.

10. Найти симметрии метрического тензора, описывающего статическое центрально-симметричное гравитационное поле. Каков их физический смысл?
11. Вычислить величину смещения перигелия орбит, следующих (произвольных) объектов Солнечной системы:
  - a. двух планет земной группы;
  - b. двух планет-гигантов;
  - c. двух астероидов.
12. Вычислить величину угла гравитационного отклонения луча света:
  - a. для звезды Бетельгейзе (расстояние принять равным радиусу звезды);
  - b. для экзопланеты HD 85512 b (расстояние принять равным радиусу планеты);
  - c. для галактики Андромеда (расстояние принять равным половине радиуса галактики);
  - d. для скопления Волос Вероники (расстояние принять равным половине радиуса скопления).
13. Получить выражения для перехода от системы отсчёта удалённого наблюдателя (системы отсчёта Шварцшильда) к сопутствующей системе отсчёта.
14. Найти сечение  $\sigma = \pi r^2$  падения безмассовой частицы в чёрную дыру, где  $r$  - максимальный прицельный параметр, при котором частица достигает горизонта событий.
15. Вывести выражение для метрики гравитационного поля не вращающейся заряженной чёрной дыры (метрику Рейснера-Нордстрема).
16. Применимо ли приближение слабого гравитационного поля на расстоянии гравитационного радиуса от центра чёрной дыры звёздной массы?

## Раздел 2 Второй раздел

### 2.1 Контроль по итогам (КИ) - 15 Неделя

#### Контроль по итогам 2

##### Вопросы и задачи

1. Показать, что при малых времена  $t \sim 0$  в моделях открытой и замкнутой Вселенной масштабный фактор зависит от времени также, как и в модели плоской Вселенной?
2. Получить зависимость от времени масштабного фактора в моделях открытой и замкнутой радиационно-доминантной Вселенной. Определить конформное время достижения максимального размера Вселенной в модели замкнутой Вселенной для ультрарелятивистского уравнения состояния.
3. Путём варьирования действия (для стадии инфляции) по скалярному полю получить уравнение для скалярного поля.
4. Предложить свой сценарий инфляции (выбор потенциала поля инфлантона), для которого рассмотреть условия применимости и определить количество е-фолдов и время от начала до окончания стадии.
5. Выписать вид метрики ППН-формализма Эддингтона-Робертсона-Шиффа для Солнечной системы и сравнить её с метрикой, полученной в ОТО.

### 2.2 Контроль по итогам (КИ) - 15 Неделя

#### Контроль по итогам 2

##### Вопросы и задачи

6. Показать, что при малых времена  $t \sim 0$  в моделях открытой и замкнутой Вселенной масштабный фактор зависит от времени также, как и в модели плоской Вселенной?
7. Получить зависимость от времени масштабного фактора в моделях открытой и замкнутой радиационно-доминантной Вселенной. Определить конформное время достижения максимального размера Вселенной в модели замкнутой Вселенной для ультрарелятивистского уравнения состояния.
8. Путём варьирования действия (для стадии инфляции) по скалярному полю получить уравнение для скалярного поля.
9. Предложить свой сценарий инфляции (выбор потенциала поля инфлантона), для которого рассмотреть условия применимости и определить количество е-фолдов и время от начала до окончания стадии.
10. Выписать вид метрики ППН-формализма Эддингтона-Робертсона-Шиффа для Солнечной системы и сравнить её с метрикой, полученной в ОТО.

## 2 Семестр

### Экзамен

#### Космология

#### Список вопросов к экзамену

1. Свойства пространства-времени в Специальной теории относительности (СТО). Преобразования Лоренца. 4-вектора. Эффекты СТО.
2. Тензорное описание электромагнитного (ЭМ) поля. Классификация и преобразования ЭМ полей в СТО. Тензор энергии-импульса ЭМ поля.
3. Понятие системы координат. Тензоры и их свойства. Основы тензорной алгебры.
4. Ковариантное дифференцирование. Связность.
5. Параллельный перенос. Геодезическая. Производная Ли.
6. Тензор кривизны.
7. Метрический тензор.
8. Кривизна римановых пространств. Символы Кристоффеля.
9. Расстояния и промежутки времени в Общей теории относительности. Движение пробной частицы в гравитационном поле.
10. Слабое гравитационное поле. Ньютоновский предел. Постоянное гравитационное поле. Распространение света в постоянном гравитационном поле.
11. Вывод уравнений Эйнштейна из эвристических соображений. Свойства уравнений Эйнштейна.
12. Уравнения Эйнштейна и вариационный принцип. Энергетические условия.
13. Тензор энергии-импульса (в уравнениях Эйнштейна).
14. Ньютоновский предел уравнений Эйнштейна. Космологическая постоянная. Законы сохранения в Общей теории относительности.
15. Слабые гравитационные поля и гравитационные волны. Поиски и регистрация гравитационных волн.
16. Плоские гравитационные волны и их поляризация. Поиски и регистрация гравитационных волн.
17. Решение Шварцшильда для центрально-симметричного гравитационного поля.
18. Движение частиц в центрально-симметричном гравитационном поле. Смещение перигелия орбит планет.
19. Радиальное распространение лучей света в центрально-симметричном гравитационном поле. Гравитационное линзирование.
20. Радиальное движение частиц и света в центрально-симметричном гравитационном поле. Чёрные дыры.
21. Гравитационный коллапс. Классификация чёрных дыр. Основные положения физики чёрных дыр.
22. Тепловое излучение чёрных дыр. Термодинамика чёрных дыр. Испарение чёрных дыр. Информационный парадокс.
23. Наблюдательные основы космологии. Основные этапы эволюции Вселенной.
24. Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера.
25. Теория расширяющейся горячей Вселенной.
26. Космологическая инфляция. Нерешённые проблемы современной космологии.